МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПОЛУ-*p*-РАЗЛОЖИМЫХ ГРУППАХ

Н.М. Адарченко[1], И.В. Близнец[1], В.Н. Рыжик[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Брянский государственный аграрный университет*

ON FINITE SEMI-*p*-DECOMPOSABLE GROUPS

N.M. Adarchenko[1], I.V. Bliznets[1], V.N. Rizhik[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Bryansk State Agrarian University*

Конечная группа G называется p-разложимой, если $G = O_{p'}(G) \times O_p(G)$. Будем говорить, что конечная группа G полу-p-разложима, если нормализатор каждой ненормальной p-разложимой подгруппы группы G p-разложим. Доказана следующая: Теорема. Предположим, что конечная группа G полу-p-разложима. Если силовская p-подгруппа P группы G не является нормальной в G, то выполняются следующие условия: (i) G является p-разрешимой и имеет нормальную холловскую p'-подгруппу H. (ii) $G / F(G)$ p-разложима. (iii) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times Z_\infty(G)$ – максимальная p-разложимая подгруппа группы G, а $G / H \times Z_\infty(G)$ – абелева.

Ключевые слова: *р-разрешимая группа*, *р-разложимая группа*, *силовская подгруппа*, *Холловская подгруппа.*

A finite group G is called *p-decomposable* if $G = O_{p'}(G) \times O_p(G)$. We say that a finite group G is *semi-p-decomposable* if the normalizer of every non-normal p-decomposable subgroup of G is p-decomposable. We prove the following Theorem. Suppose that a finite group G is semi-p-decomposable. If a Sylow p-subgroup P of G is not normal in G, then the following conditions hold: (i) G is p-soluble and G has a normal Hall p'-subgroup H. (ii) $G / F(G)$ is p-decomposable. (iii) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times Z_\infty(G)$ is a maximal p-decomposable subgroup of G, and $G / H \times Z_\infty(G)$ is abelian.

Keywords: *finite group*, *p-soluble group*, *p-decomposable group*, *Sylow subgroup*, *Hall subgroup*.

Введение

Все рассматриваемые группы в статье конечны. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n, как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$, множество всех простых чисел, делящих порядок группы G. Группа G называется *p-разложимой*, если $G = O_{p'}(G) \times O_p(G)$.

Напомним, что группа G называется *полунильпотентной* [1] если нормализатор каждой ненормальной нильпотентной подгруппы группы G нильпотентен. Аналогично с этим будем говорить, что G является полу-p-разложимой, если нормализатор каждой ненормальной p-разложимой подгруппы G является p-разложимым.

Замечание **0.1.** Покажем, что G является полу-p-разложимой тогда и только тогда, когда нормализатор каждой ненормальной подгруппы A из G, которая является либо p-группой, либо p'-группой, является p-разложимым. Так как каждая такая подгруппа p-разложима, достаточно показать, что если нормализатор любой ненормальной подгруппы A из G, которая является либо p-группой или p'-группой, является p-разложимым, то G полу-p-разложима.

Пусть H – некоторая ненормальная p-разложимая подгруппа в G. Тогда $H = O_{p'}(H) \times O_p(H)$ и $N_G(H) = N_G(O_{p'}(H)) \cap N_G(O_p(H))$. Более того, поскольку H ненормальна в G, по крайней мере одна из подгрупп $O_{p'}(H)$ или $O_p(H)$ не является нормальной в G. Но тогда, по крайней мере, одна из подгрупп $N_G(O_{p'}(H))$ или $N_G(O_p(H))$ является p-разложимой и следовательно $N_G(H)$ p-разложима.

Строение полунильпотентных групп хорошо известно (см. [1] или [2, гл. 4, раздел 7]. В настоящей работе доказывается следующая

Теорема **0.2.** *Предположим*, *что группа* G *полу-p-разложима. Если силовская p-подгруппа из* G *не является нормальной в* G, *то выполняются следующие условия*:

(i) G – *p-разрешима и имеет нормальную холловскую* p'*-подгруппу.*

(ii) $G / F(G)$ *– является p-разложимой.*

(iii) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times Z_\infty(G)$ *является максимальной p-разложимой подгруппой группы* G, *а* $G / H \times Z_\infty(G)$ *является абелевой.*

1 Предварительные сведения

Следующая лемма хорошо известна.

***Лемма* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ *– класс всех p-разложимых групп. Тогда*:

(1) Если $G \in \mathfrak{F}$, *тогда* $G / N \in \mathfrak{F}$ *для любой нормальной подгруппы* N *из* G.

(2) Если $G \in \mathfrak{F}$, *тогда* $E \in \mathfrak{F}$ *для любой подгруппы* E *из* G.

(3) Если G / N, $G / L \in \mathfrak{F}$, *тогда*

$$G / N \cap L \in \mathfrak{F}.$$

(4) Если $G / \Phi \in \mathfrak{F}$, *тогда* $G \in \mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.2.** *Предположим, что группа* G *p-разрешима и пусть* P *– её p-силовская подгруппа и пусть* C *–* p'*-холловская подгруппа группы G. Если* $N_G(P)$ *и* $N_G(C)$ *являются p-разложимыми, то* G *является p-разложимой.*

Доказательство. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда R является либо p-группой, либо p'-группой, так как G является p-разрешимой по условию. Кроме того, PR / R является силовской p-подгруппой и CR / R является холловской p'-подгруппой в G / R и

$$N_G(PR / R) = N_G(P)R / R \simeq N_G(P) / N_G(P) \cap P$$

и

$$N_G(CR / R) = N_G(C)R / R \simeq N_G(C) / N_G(C) \cap C$$

являются p-разложимыми по лемме 2.1 (1). Поэтому

$$G / R = O_{p'}(G / R) \times O_p(G / R)$$

является p-разложимой по индукции. Предположим, что R является p-группой. Тогда $O_p(G / R) = O_p(G) / R = P / R$ нормальна в G / R, а P является нормальной в G. Но тогда $G = N_G(P)$ p-разложима по условию. Аналогично можно показать, что $G = N_G(C)$ является p-разложимой в случае, когда R является p'-группой. □

***Лемма* 1.3** [4, Ch. V, Theorem 26.1]. *Если* G *группа Шмидта, тогда* $G = P \rtimes Q$, *где* $P = G^N = G'$ *является силовской p-подгруппой из* G *и* Q *– силовская q-подгруппа из* G *для любых простых чисел* $p \neq q$.

***Лемма* 1.4.** *Если G – минимальная не-p-разложимая группа, тогда G – группа Шмидта.*

Доказательство. Предположим, что это неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G является p-нильпотентной группой. Действительно, если G не является p-нильпотентной, то это – минимальная не p-нильпотентная группа, а значит, G – группа Шмидта [5, IV, Satz 5.4], что противоречит нашему предположению о G. Таким образом $G = V \rtimes P$, где V – нормальное p-дополнение из G и P является силовской p-подгруппой группы G. Более того $|\pi(G)| > 2$, поскольку в противном случае всякая собственная подгруппа G нильпотентна и, следовательно, G является группой Шмидта.

Пусть теперь $q \in \pi(V)$ и Q есть силовская q-подгруппа из V. Тогда $G = VN_G(Q)$ по аргументу Фраттини и для некоторого $x \in G$ мы имеем $P \leq N_G(Q^x)$. Но тогда $Q^x \rtimes P = Q^x \times P$ поскольку $2 = |\pi(Q^x \rtimes P)| < |\pi(G)|$ и всякая собственная подгруппа из G является p-разложимой. Поэтому $|G : C_G(P)|$ является q'-числом для каждого $q \in \pi(V)$. Следовательно $G = V \times P$ p-разложима, противоречие. □

2 Доказательство теоремы 0.2

Предположим, что эта теорема неверна и пусть G является контрпримером минимального порядка. Тогда G не p-разложима.

(1) *Всякая собственная подгруппа E группы G является полу-p-разложимой. Следовательно, утверждение теоремы имеет место для E.*

Пусть V – ненормальная p-разложимая подгруппа в E. Тогда V не является нормальной в G, так что $N_G(V)$ p-разложима по условию. Следовательно, $N_E(V) = N_G(V) \cap E$ – p-разложима по лемме 1.1 (2). Поэтому, E полу-p-разложима. Следовательно, утверждение (1) верно, согласно выбору группы G.

(2) *Каждая собственная фактор-группа* G / N *в* G (*т. е.* $N \neq 1$) *является полу-p-разложимой. Следовательно, утверждение теоремы имеет место для* G / N.

Ввиду замечания 0.1 и выбора группы G, достаточно показать, что если U / N – любая ненормальная подгруппа из G / N такая что U / N является либо p-группой или p'-группой, то $N_{G/N}(U / N)$ является p-разложимым. Без ограничения общности можно считать, что N – минимальная нормальная подгруппа в G.

Поскольку U / N не является нормальной в G / N, $U / N < G / N$ и U не является нормальной в G. Следовательно, U – собственная подгруппа в G, что означает, что U p-разреши-ма в утверждении (1). Следовательно, N является либо p-группой, либо p'-группой. Сначала предположим, что N – p'-группа.

Если U / N – p'-группа, то U является p'-группой и поэтому $N_G(U)$ p-разложима по предположению. Следовательно,

$$N_{G/N}(U / N) = N_G(U) / N$$

p-разложима по лемме 1.1 (1). Предположим теперь, что U / N это p-группа для некоторых $j \neq i$. Тогда N имеет дополнение V в U, и каждые два дополнения к N в U сопряжены в U, так как V – силовская p-подгруппа в U. Следовательно, $N_G(U) = N_G(NV) = NN_G(V)$. Так как $U = NV$ не является нормальной в G, то V не является нормальной в G и $N_G(V)$ p-неразложим. Следовательно,

$N_{G/N}(U/N) = N_G(U)N/N \simeq N_G(U)/N_G(U) \cap N$

является p-разложимым. Точно так же можно доказать, что $N_{G/N}(U/N)$ p-разложим в случае, когда N – p-группа.

(3) *Если A – минимальная не-p-разложимая подгруппа в G, то $A = R \rtimes Q$, где $R = A^N = A'$ – силовская r-подгруппа A и Q является силовской q-подгруппой A для некоторых различных простых чисел r и q. Более того, R нормальна в G и $R \leq O_r(G)$.*

Первая часть утверждения непосредственно следует из лемм 1.3 и 1.4. Так как A не является p-разложимой, то по условию R нормальна в G. Следовательно, $R \leq O_r(G)$.

(4) *G – p-разрешима.*

Предположим, что это неверно. Тогда G – неабелева простая группа, так как каждая собственная секция G p-разрешима в соответствии с утверждениями (1) и (2). Более того, G не является p-разложимой и поэтому имеет минимальную не-p-разложимую подгруппу A. Из утверждения (3) следует, что для некоторого простого r и для некоторой силовской r-подгруппы R из A имеем $1 < R \leq O_r(G) < G$. Это противоречие показывает, что условие (4) справедливо.

(5) *Утверждение* (i) *выполняется для G.*

Так как G p-разрешима, согласно условия (4), то G обладает холловской p'-подгруппой H. Так как P не является нормальной в G по условию, $N_G(P)$ является p-разложимой. Поэтому, поскольку G не является p-разложимой, из леммы 1.2 следует, что H нормальна в G. Следовательно, мы имеем (5).

(6) *Утверждение* (ii) *справедливо для G.*

Ввиду леммы 1.1 (1) достаточно показать, что $D = G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, где $\mathfrak{F}$ – класс всех p-разложимых групп. Предположим, что это неверно. Тогда $D \neq 1$, и для любой минимальной нормальной подгруппы R группы G группа

$$(G/R)^{\mathfrak{F}} = RD/R \simeq D/D \cap R$$

нильпотентна, по условию (2) и лемме 1.1 (1). Кроме того, R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $R \leq D$ и $R \nleq \Phi(G)$ по лемме 1.1 (3, 4).

Так как G не является p-разложимой, из утверждения (3) и [3, гл. A, 15.6] следует, что $R = C_G(R) = O_r(G) = F(G)$ для некоторого простого r.

Тогда $R < D$ и $G = R \rtimes M$, где M не является p-разложимой, поэтому имеет минимальную не p-разложимую подгруппу A. Из утверждения (3) следует, что для некоторого простого q делящего $|A|$ и для силовской q-подгруппы Q из A мы имеем $1 < Q \leq F(G) \cap M = R \cap M = 1$. Это противоречие завершает доказательство (6).

(7) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = O_{p'}(V) \times O_p(V)$ *для каждой подгруппы группы G, содержащей* $O_{p'}(G) \times O_p(G)$.

Действительно, поскольку $H = O_{p'}(G)$ согласно утверждению (5), каждая подгруппа группы G, содержащая $O_{p'}(G) \times O_p(G)$, является субнормальной в G. Поэтому V является субнормальной в G, значит

$O_{p'}(V) \times O_p(V) \leq O_{p'}(G) \times O_p(G) \leq O_{p'}(V) \times O_p(V)$.

Таким образом, мы имеем (7).

(8) *Утверждение* (iii) *справедливо для* G.

Прежде всего заметим, что $O_{p'}(G) \times O_p(G)$ – максимальная p-разложимая подгруппа группы G по условию (7). Более того,

$$O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times O_p(G)$$

и $G/C_G(O_p(G))$ является p-группой и, следовательно, $O_p(G) \leq Z_\infty(G)$. Следовательно

$$O_{p'}(G) \times O_p(G) = HZ_\infty(G).$$

Теперь мы покажем, что

$$G/O_{p'}(G) \times O_p(G) = G/H \times Z_\infty(G)$$

является абелевой. Ввиду леммы 1.1 (1) достаточно показать, что G' является p-разложимым. Предположим, что это неверно.

(a) $R = C_G(R) = O_q(G) = F(G) \nleq \Phi(G)$ *для некоторого простого q и $|R| > q$.*

Из утверждения (2) следует, что для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G,

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N$$

является p-разложимой. Если $R \neq N$, то

$$G'/((G' \cap N) \cap (G' \cap R)) = G'/1$$

p-разложима по лемме 1.1 (3). Поэтому R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $R \leq D$ и $R \nleq \Phi(G)$ по лемме 1.1 (4). Следовательно,

$$R = C_G(R) = O_q(G) = F(G)$$

для некоторого простого q по теореме 15.6 в [3, гл. A], поэтому $|R| > q$, так как в противном случае $G/R = G/C_G(R)$ является циклической, откуда следует, что $G' = R$ является p-разложимым.

(b) $Z_\infty(G) = 1$. Следовательно,

$$O_{p'}(G) \times O_p(G) = H$$

(это следует из утверждений (5), (8) и (a)).

(c) *P – минимальная не абелева группа.*

Пусть $W = HV$, где V – максимальная подгруппа группы P. Тогда

$$H = O_{p'}(G) \times O_p(G) = O_{p'}(W) \times O_p(W)$$

Из условий (*b*) и (7), поэтому

$$W / O_{p'}(W) \times O_p(W) = W / H \simeq V$$

является абелевой по условию (1). Поэтому P не является абелевой, но каждая собственная подгруппа в P абелева. Следовательно, мы имеем (*c*).

(*d*) $H = R$ – силовская q-подгруппа группы G, и всякая подгруппа $V \neq 1$ из P действует неприводимо на R. Следовательно, каждая собственная подгруппа V группы V циклическая.

Предположим, что $|\pi(H)| > 1$. Существует силовская q-подгруппа Q из H такая, что $P \leq N_G(Q)$ по утверждению (*b*) и лемме Фраттини. Пусть $K = QP$. Тогда $K < G$ и $Q = H \cap K$ нормальны в K, поэтому

$$R \leq Q = O_{p'}(K) \times O_p(K),$$

так как $C_G(R) = R$ по утверждению (*a*). Поэтому

$$K / O_{p'}(G) \times O_p(G) = K / Q \simeq P$$

абелева по утверждению (1), противоречие. Следовательно, H – нормальная силовская q-подгруппа группы G. Следовательно

$$H \leq F(G) \leq C_G(R) = R,$$

в силу [3, гл. A, 13.8 (b)], поэтому $H = R$.

Пусть теперь $S = RV$. По теореме Машке $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, где R_i – минимальная нормальная подгруппа S для всех i. Тогда

$$R = C_S(R) = C_S(R_1) \cap \cdots \cap C_S(R_n).$$

Следовательно, для некоторого i подгруппа R_iV не является нильпотентной и поэтому имеет минимальную не-p-разложимую подгруппу A такую, что $1 < A'$ нормальна в G по утверждению (3). Но тогда $R \leq A$. Поэтому $i = 1$, значит мы имеем (*d*), поскольку V абелева по условию (*c*).

Окончательное противоречие для (8). Так как каждая максимальная подгруппа группы P циклическая по утверждению (*d*), $q = 2$ по [6, гл. 5, теоремы 4.3, 4.4]. Следовательно, $|R| = p$, вопреки утверждению (*a*). Таким образом, имеем (8).

Из утверждений (5), (6) и (8) следует, что выводы теоремы выполнены для G вопреки нашему выбору G. Это окончательное противоречие завершает доказательство теоремы. □

В заключение, отметим следующий открытый вопрос.

Вопрос. Можно ли обобщить основной результат данной работы в рамках теории σ-свойств групп, построенной в работах [7]–[9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chih-Han*, *Sah.* On a generalization of finite nilpotent groups / Sah Chih-Han // Math. Z. – 1957. – Vol 68, № 1. – P. 189–204.

2. *Weinstein*, *M*. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Polygonal Publishing House, 1982.

3. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.

4. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

5. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer – Verlag. Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

6. *Gorenstein*, *D*. Finite Groups / D. Gorenstein. – Harper & Row Publishers, New York – Evanston – London, 1968.

7. *Скиба*, *А.Н*. On σ-properties of finite groups I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

8. *Скиба*, *А.Н*. On σ-properties of finite groups II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.

9. *Скиба*, *А.Н*. On σ-properties of finite groups III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.

Поступила в редакцию 26.01.18.